

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН: НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМЫ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В.Н. Паймушин, Т.В. Полякова

Аннотация

Предложен уточненный вариант уравнений свободных колебаний ортотропных пластин, построенных в первом приближении редукцией трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин путем использования тригонометрических базисных функций и удовлетворения статическим граничным условиям на граничных поверхностях. Эти уравнения, решения которых найдены для пластины с шарнирно опертыми кромками, разделяются на две обособленные системы уравнений. Первой из них описываются неклассические бессдвиговые продольно-поперечные формы свободных колебаний, сопровождающихся искажением плоской формы поперечных сечений. Показано, что соответствующие им частоты колебаний при некоторых геометрических параметрах пластины сильно зависят от коэффициента Пуассона, модуля упругости в поперечном направлении и для пластин средней толщины при одном и том же значении частотного параметра (тона) могут быть значительно ниже частот, соответствующих классическим продольным формам свободных колебаний, совершающихся с сохранением плоской формы поперечных сечений. Второй системой уравнений описываются поперечные изгибно-сдвиговые формы свободных колебаний, частоты которых уменьшаются при уменьшении модуля поперечного сдвига. По качеству и содержательности они практически эквивалентны аналогичным уравнениям известных вариантов уточненных теорий, но, в отличие от них, при увеличении номера тона и уменьшении параметра относительной толщины приводят к решениям, полученным в рамках классической теории стержней.

Ключевые слова: ортотропная пластина, уточненная теория, тригонометрические функции, свободные колебания, продольно-поперечная форма, частоты колебаний.

Введение

Главная цель большинства исследований по разработке уточненных вариантов теории стержней, пластин и оболочек с учетом поперечных составляющих деформации состояла в уточнении классических уравнений, основанных на гипотезах Бернулли–Эйлера (для стержней) и Кирхгофа–Лява (для пластин и оболочек). К настоящему времени разработан ряд подходов к построению таких уточненных теорий, которые основаны на менее жестких допущениях, чем отмеченные классические гипотезы. Это – прикладные уточненные теории С.П. Тимошенко, С.А. Амбарцумяна, Э. Рейсснера, В. Койтера, П. Нагди и др. Они в первую очередь позволяют учитывать влияние деформаций поперечных сдвигов и расширяют область применения развитых теорий к расчетам элементов конструкций из современных композитных материалов. Многочисленные конкретные результаты, а также библиография работ, относящихся к указанным теориям, приведены и проанализированы, в частности, в серии монографий ([1–6] и др.) и обзоров ([7, 8] и др.). При анализе предлагаемых уточненных уравнений авторы всегда сравнивают между собой решения тех или иных задач, получаемых на основе классических

и уточненных уравнений. Такое сравнение, как правило, проводится или по определяемым полям перемещений, деформаций и напряжений при постановке задач статики, или по частотам и формам собственных колебаний при постановке динамических задач, или по критическим нагрузкам и формам потери устойчивости при постановке задач устойчивости. В результате таких сравнений, как правило, пытаются доказать, что для постановки тех или иных задач механики деформирования тонкостенных конструкций предлагаемые уравнения более точные, чем классические уравнения.

Для обоснования и формулирования цели проводимых ниже исследований следует остановиться на анализе работ [9–11], посвященных построению точных аналитических решений линейных задач теории упругости о частотах и формах свободных колебаний, то есть решений, удовлетворяющих как уравнениям движения, так и сформулированным граничным условиям. В первых двух из них была рассмотрена двумерная задача о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями, свободными от усилий. На базе двойных тригонометрических базисных функций при точном удовлетворении всем статическим граничным условиям были найдены аналитические решения задач в виде компактных формул для определения частот и функций перемещений, описывающих формы бессдвиговых колебаний. В дальнейшем в [11] такие же аналитические решения трехмерной задачи были найдены и для пространственного ортотропного прямоугольного параллелепипеда со свободными гранями.

Анализ результатов, полученных в указанных работах, приводит к следующим выводам.

1. Построенными решениями, соответствующими нулевой гармонике в одном из направлений, описываются как чисто изгибные, так и чисто продольные бессдвиговые формы колебаний, соответствующие классической модели Бернулли–Эйлера в теории стержней и Кирхгофа–Лява в теории пластин. Эти решения характеризуются сохранением плоской формы поперечных сечений, то есть точки, находящиеся в плоскостях, нормальных к осям координат до деформации, остаются в нормальных плоскостях и в деформированном состоянии.

2. Уравнения, описывающие плоские формы движения (в частности, свободные колебания), соответствующие плоскому напряженному состоянию, и их решения могут быть получены из трехмерных уравнений и их решений только в предположении о том, что нормальное напряжение равно нулю не только на соответствующих свободных гранях тела, но и на всех внутренних гранях, параллельных граничным. Однако частоты плоских продольных форм колебаний, найденные из таких уравнений, не всегда являются наименьшими по сравнению с другими. Например, для плоского стержня-полосы или пространственного бруса, наряду с формами продольных колебаний, совершающихся с сохранением плоской формы поперечного сечения (известные в литературе классические решения), имеются также и бессдвиговые продольно-поперечные формы свободных колебаний, которые характеризуются искажением плоской формы поперечного сечения. Если на двух противоположных гранях перемещения в перпендикулярных к ним направлениях не стеснены, то частоты свободных колебаний, соответствующих второй из указанных форм, на 20–30% ниже по сравнению с частотами, соответствующими ситуации сохранения плоских форм поперечных и продольных сечений.

В силу сформулированных выводов представлялось целесообразным использование тригонометрических базисных функций для понижения размерности трехмерных уравнений теории упругости и построение на их основе таких одномерных уравнений теории стержней и двумерных уравнений теории пластин и оболочек, которыми при минимальном количестве вводимых в рассмотрение иско-

функций удастся удовлетворить статическим граничным условиям на незакрепленных лицевых поверхностях пластин и оболочек, учесть при этом деформации поперечных сдвигов и обжатия, выявить на их основе все классические и неклассические формы колебаний. Кроме того, такие уравнения без дополнительных дифференциальных преобразований должны допускать переход к классическим одномерным уравнениям теории стержней и двумерным уравнениям теории пластин и оболочек, основанным на классических гипотезах Бернулли–Эйлера и Кирхгофа–Лява.

Были построены [12] точные и приближенные уравнения статики и динамики стержня-полосы, удовлетворяющие сформулированным выше условиям и требованиям. Понижение размерности двумерных уравнений плоской задачи линейной теории упругости было осуществлено путем аппроксимации поперечных нормальных и касательных напряжений в направлении поперечной координаты на базе одинарных тригонометрических функций, что позволило удовлетворить статическим граничным условиям на продольных гранях путем введения в рассмотрение минимального количества неизвестных одномерных функций.

Было показано [13], что решения модельных задач о напряженно-деформированном состоянии стержня-полосы при некоторых видах нагружения, полученные на основе указанных уравнений, с точностью $O(\varepsilon^5)$ ($1 > \varepsilon > 0$ – относительная высота полосы) совпадают с точными решениями, найденными на основе двумерных уравнений плоской задачи теории упругости. Эти результаты позволяют предложенную ранее [12] обобщенную уточненную модель рекомендовать к практическому применению как имеющую весьма высокую степень точности для задач статики. Исследование качества и содержательности этой уточненной модели [12] при постановке и решении задач о свободных колебаниях стержня-полосы с шарнирно опертыми торцевыми сечениями проведено в работе [13]. В настоящей статье дается обобщение полученных в ней результатов на двумерные задачи теории ортотропных пластин.

1. Уточненные уравнения теории пластин с учетом деформаций поперечных сдвигов и обжатия

Рассмотрим прямоугольную ортотропную пластину, имеющую толщину $2h$ и отнесенную к ортогональной декартовой системе координат x_1, x_2, ζ , совмещенной с осями ортотропии. В соответствии с результатами работы [13] примем упрощающие предположения

$$\nu_{13} = \nu_{31} = \nu_{23} = \nu_{32} = 0, \quad (1)$$

что позволяет соотношения обобщенного закона Гука представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E_1^* (\varepsilon_{11} + \nu_{21} \varepsilon_{22}), \quad \overrightarrow{1, 2}, \quad \sigma_{33} = E_3 \varepsilon_{33}, \\ \sigma_{12} &= 2G_{12} \varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2G_{13} \varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = 2G_{23} \varepsilon_{23}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $E_1^* = E_1/(1 - \nu_{12} \nu_{21})$, $\overrightarrow{1, 2}$; E_α , $\alpha = 1, 2, 3$, – модули упругости в направлениях осей $x_1, x_2, x_3 = \zeta$; $\overleftarrow{\nu_{\alpha\beta}}$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, – коэффициенты Пуассона; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига;

$$2\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} \quad (3)$$

– компоненты деформаций; u_α – проекции вектора перемещений на оси x_1, x_2, ζ .

Представим статические граничные условия на гранях $\zeta = \pm h$ в виде

$$E_3 u_{3,\zeta} \Big|_{\zeta=\pm h} = p_{33}^c \mp p_{33}^a, \quad G_{13} (u_{1,\zeta} + u_{3,i}) \Big|_{\zeta=\pm h} = p_{3i}^c \mp p_{3i}^a, \quad (4)$$

где $p_{3\alpha}^c$, $p_{3\alpha}^a$ – симметричные (синфазные) и антисимметричные (антифазные) составляющие внешней поверхностной нагрузки, равные

$$p_{3\alpha}^c = \frac{p_{3\alpha}^- + p_{3\alpha}^+}{2}, \quad p_{3\alpha}^a = \frac{p_{3\alpha}^- - p_{3\alpha}^+}{2}. \quad (5)$$

Если для компонент тензора деформаций в соответствии с полученными ранее [12, 13] результатами использовать простейшие аппроксимации

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{i3} &= r\psi_i \cos r\zeta - \frac{p_{3i}^a}{G_{i3}} \sin r\zeta - \frac{p_{3i}^c}{G_{i3}} \cos \lambda\zeta, \\ \varepsilon_{33} &= r\varphi \cos r\zeta - \frac{p_{33}^a}{E_3} \sin r\zeta - \frac{p_{33}^c}{E_3} \cos \lambda\zeta, \quad r = \frac{\pi}{2h}, \quad \lambda = \frac{\pi}{h} = 2r, \end{aligned} \quad (6)$$

то, исходя из соотношений

$$\sigma_{33} = E_3 \varepsilon_{33} = E_3 u_{3,\zeta}, \quad \sigma_{i3} = 2G_{i3}\varepsilon_{i3} = G_{i3} (u_{i,\zeta} + u_{3,i}),$$

для компонент перемещений можно получить выражения

$$\begin{aligned} u_i &= U_i - \zeta W_{,i} + \psi_i \sin r\zeta + \frac{\cos r\zeta}{r} \varphi_{,i} + \frac{p_{3i}^a}{rG_{i3}} \cos r\zeta - \frac{\sin r\zeta}{r^2 E_3} p_{33,i}^a - \\ &- \frac{p_{3i}^c}{\lambda G_{i3}} \sin \lambda\zeta - \frac{\cos \lambda\zeta}{\lambda^2 E_3} p_{33,i}^c, \quad u_3 = W + \varphi \sin r\zeta + \frac{p_{33}^a}{rE_3} \cos r\zeta - \frac{p_{33}^c}{\lambda E_3} \sin \lambda\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом граничные условия (4) удовлетворяются точно. Отметим, что в соотношениях (6) и (7) $U_i = u_i|_{\zeta=0}$, $W = u_3|_{\zeta=0}$ – неизвестные двумерные функции, являющиеся перемещениями точек срединной плоскости при $p_{3\alpha} = 0$, а ψ_i , φ – аналогичные двумерные функции, которыми описываются деформации поперечных сдвигов и поперечного обжатия нормали при $p_{3\alpha} = 0$.

Подстановка полученных выражений (7) в соотношения (3) приводит к следующим выражениям для тангенциальных компонент тензора деформаций:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij} &= U_{i,j} + U_{j,i} - 2\zeta W_{,ij} + (\psi_{i,j} + \psi_{j,i}) \sin r\zeta + \\ &+ \frac{2 \cos r\zeta}{r} \varphi_{,ij} + \frac{\cos r\zeta}{r} \left(\frac{p_{3i,j}^a}{G_{i3}} + \frac{p_{3j,i}^a}{G_{j3}} \right) - \frac{2 \sin r\zeta}{r^2 E_3} p_{33,ij}^a - \\ &- \frac{\sin \lambda\zeta}{\lambda} \left(\frac{p_{3i,j}^c}{G_{i3}} + \frac{p_{3j,i}^c}{G_{j3}} \right) - \frac{2 \cos \lambda\zeta}{\lambda^2 E_3} p_{33,ij}^c, \end{aligned} \quad (8)$$

Вариация потенциальной энергии деформаций в соответствии с выражениями (6) и (8) будет равна

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \int_{-h}^h \sigma_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} dx_1 dx_2 d\zeta = \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \left(T_{ij} \delta U_{j,i} + M_{ij} \delta W_{,i} + \right. \\ &\left. + H_{ij} \delta \psi_{j,i} + N_{ij} \delta \varphi_{,ij} + N_{i3} \delta \psi_i + N_{33} \delta \varphi \right) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где введены в рассмотрение внутренние усилия и моменты, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \int_{-h}^h \sigma_{ij} d\zeta; \quad M_{ij} = - \int_{-h}^h \sigma_{ij} \zeta d\zeta; \quad H_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} \sin r\zeta d\zeta, \\ N_{ij} &= \frac{1}{r} \int_{-h}^h \sigma_{ij} \cos r\zeta d\zeta; \quad N_{\alpha 3} = r \int_{-h}^h \sigma_{\alpha 3} \cos r\zeta d\zeta. \end{aligned} \quad (10)$$

Если допустить, что исходные упрощающие предположения (1) выполнены лишь с некоторой степенью точности, то после подстановки в (10) соотношений (2), (8) и интегрирования по ζ можно получить соответствующие выражения для введенных в рассмотрение усилий и моментов. Однако получающиеся таким образом соотношения для T_{ij} , M_{ij} , H_{ij} , N_{ij} можно уточнить, если отказаться от исходных предположений (1) и представить соотношения обобщенного закона Гука в неупрощенном виде

$$\sigma_{11} = g_{11}\varepsilon_{11} + g_{12}\varepsilon_{22} + g_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{12} = 2G_{12}\varepsilon_{12}; \quad \overleftrightarrow{1, 2, 3}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta}, \\ g_{12} = g_{21} &= \frac{E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})}{\Delta} = \frac{E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})}{\Delta}, \quad \overleftrightarrow{1, 2, 3}, \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя далее соотношения (11) в выражения (10) и используя (6) и (8), приходим к соотношениям упругости для усилий и моментов следующего вида:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= 2 \left[\sum_{j=1}^2 g_{ij} \left(hU_{j,j} + \frac{\varphi_{,jj}}{r^2} + \frac{p_{3j,j}^a}{G_{13}r^2} \right) + g_{i3}\varphi \right], \\ T_{12} &= 2G_{12} \left[h(U_{1,2} + U_{2,1}) + \frac{2\varphi_{,12}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{p_{31,2}^a}{G_{13}} + \frac{p_{32,1}^a}{G_{23}} \right) \right], \\ M_{ii} &= 2 \left[\sum_{j=1}^2 g_{ij} \left(\frac{h^3}{3}W_{,jj} - \frac{\psi_{j,j}}{r^2} + \frac{p_{33,jj}^a}{E_3r^4} + \frac{\pi p_{3j,j}^c}{\lambda^3 G_{j3}} \right) + \frac{g_{i3}p_{33}^a}{r^2 E_3} \right], \\ M_{12} &= 2G_{12} \left[\frac{2h^3}{3}W_{,12} - \frac{\varphi_{1,2} + \varphi_{2,1}}{r^2} + \frac{2p_{33,12}^a}{E_3r^4} + \frac{\pi}{\lambda^3} \left(\frac{p_{31,2}^c}{G_{13}} + \frac{p_{32,1}^c}{G_{23}} \right) \right], \\ H_{ii} &= \sum_{j=1}^2 g_{ij} \left(-\frac{2}{r^2}W_{,jj} + h\psi_{j,j} - \frac{h}{E_3r^2}p_{33,jj}^a - \frac{4}{3r\lambda G_{j3}}p_{3j,j}^c \right) - \frac{g_{i3}hp_{33}^a}{E_3}, \\ N_{ii} &= \sum_{j=1}^2 \frac{g_{ij}}{r^2} \left(2U_{j,j} + h\varphi_{,jj} + \frac{h}{G_{j3}}p_{3j,j}^a - \frac{2}{3\lambda^2 E_3}p_{33,jj}^c \right) + g_{i3} \left(h\varphi - \frac{2p_{33}^c}{3r^2 E_3} \right), \\ N_{12} &= \frac{G_{12}}{r^2} \left[2(U_{1,2} + U_{2,1}) + 2h\varphi_{,12} + h \left(\frac{p_{31,2}^a}{G_{13}} + \frac{p_{32,1}^a}{G_{23}} \right) - \frac{4}{3\lambda^2}p_{33,12}^c \right], \\ N_{33} &= \sum_{j=1}^2 g_{3j} \left(2U_{j,j} + h\varphi_{,jj} + hp_{3j,j}^a - \frac{2}{3\lambda^2 E_3}p_{33,jj}^c \right) + g_{33} \left(r^2 h\varphi - \frac{2p_{33}^c}{3E_3} \right), \\ N_{i3} &= G_{i3}hr^2\psi_i - \frac{2p_{3i}^c}{3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если ввести предположение $\psi_i = \varphi = 0$, то при $p_{3\alpha}^a = p_{3\alpha}^c = 0$ соотношения (7)–(9), (13) принимают вид

$$u_i = U_i - zW_{,i}, \quad u = W, \quad 2\varepsilon_{ij} = U_{i,j} + U_{j,i} - 2\zeta W_{,ij}, \quad (14)$$

$$\delta I = \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} (T_{ij}\delta U_{j,i} + M_{ij}\delta W_{,ij}) dx_1 dx_2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
T_{ii} &= \sum_{j=1}^2 2g_{ij} h U_{j,j}, \quad M_{ii} = \sum_{j=1}^2 2g_{ij} \frac{h^3}{3} W_{,jj}, \\
T_{12} &= 2hG_{12}(U_{1,2} + U_{2,1}), \quad M_{12} = \frac{4h^3}{3} G_{12} W_{,12}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Из них соотношения (14), (15) являются классическими соотношениями теории пластин Кирхгофа, а физические соотношения (15) становятся классическими, если выполняются приближенные равенства

$$g_{11} \approx E_1/(1 - \nu_{12} \nu_{21}), \quad g_{12} \approx E_1 \nu_{21}/(1 - \nu_{12} \nu_{21}).$$

Последние становятся точными, если в формулах (12) принять во внимание соотношения (1).

Предположим, что на гранях $x_i = x_i^-$, $x_i = x_i^+$ на пластину действуют поверхностные усилия $p_{i\alpha}$, которые в соответствии с формулами

$$\begin{aligned}
T_{i\alpha}^s &= \int_{-h}^h p_{i\alpha} d\zeta; \quad M_{ij}^s = - \int_{-h}^h p_{ij} \zeta d\zeta; \quad H_{ij}^s = \int_{-h}^h p_{ij} \sin r\zeta d\zeta; \\
N_{ij}^s &= \frac{1}{r} \int_{-h}^h p_{ij} \cos r\zeta d\zeta; \quad N_{i3}^s = r \int_{-h}^h p_{i3} \sin r\zeta d\zeta
\end{aligned} \tag{17}$$

приводятся к статически эквивалентным им усилиям и моментам, приложенным в точках контурных линий на срединной плоскости $\zeta = 0$. Вариация их работы, а также объемных и поверхностных усилий $F_\alpha = F_\alpha(x_1, x_2)$, $p_{3\alpha}^a$, $p_{3\alpha}^c$ на перемещениях (7) будет равна

$$\begin{aligned}
\delta A &= \sum_{i=1}^2 \left[\int_{x_{3-i}^-}^{x_{3-i}^+} \sum_{j=1}^2 \left(T_{ij}^s \delta U_j + T_{i3}^s \delta W + M_{ij}^s \delta W_{,j} + H_{ij}^s \delta \psi_j + N_{ij}^s \delta \varphi_{,j} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + N_{i3}^s \delta \varphi \right) dx_{3-i} \right]_{x_i=x_i^-}^{x_i=x_i^+} + \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \left(X_i \delta U_i + X_3 \delta W + Y_i \delta \psi_i + Y_3 \delta \varphi + \right. \\
&\quad \left. + M_i \delta W_{,i} + m_i \delta \varphi_{,i} \right) dx_1 dx_2 \Big], \tag{18}
\end{aligned}$$

где введены в рассмотрение внешние поверхностные усилия и моменты

$$X_\alpha = -2p_{3\alpha}^a + 2hF_\alpha; \quad Y_\alpha = 2p_{3\alpha}^c; \quad M_i = -2hp_{3i}^c; \quad m_i = 2F_i/r^2. \tag{19}$$

Используя соотношения (7), для вариации кинетической энергии пластины можно получить выражение вида

$$\begin{aligned}
\delta K &= - \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \int_{-h}^h \rho u_{\alpha,tt} \delta u_\alpha dx_1 dx_2 d\zeta = \\
&= - \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \left(\ddot{X}_i \delta U_i + \ddot{X}_3 \delta W + \ddot{Y}_i \delta \psi_i + \ddot{Y}_3 \delta \varphi + \ddot{M}_i \delta W_{,i} + \ddot{m}_i \delta \varphi_{,i} \right) dx_1 dx_2, \tag{20}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_i &= 2\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(hU_i + \frac{\varphi_{,i}}{r^2} + \frac{p_{3i}^a}{r^2 G_{13}} \right); \quad \ddot{X}_3 = 2\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(hW + \frac{p_{33}^a}{r^2 E_3} \right); \\
\ddot{Y}_i &= -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2}{r^2} W_{,i} - h\psi_i + \frac{h}{E_3 r^2} p_{33,i}^a + \frac{4p_{3i}^c}{3r\lambda G_{13}} \right); \\
\ddot{Y}_3 &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(h\varphi + \frac{4p_{33}^c}{3r\lambda E_3} \right); \\
\ddot{M}_i &= 2\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{h^3}{3} W_{,i} - \frac{\psi_i}{r^2} + \frac{p_{33,i}^a}{r^4 E_3} + \frac{\pi p_{3i}^c}{\lambda^3 G_{13}} \right); \\
\ddot{m}_i &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{2}{r^2} U_i + \frac{h\varphi_{,i}}{r^2} + \frac{hp_{3i}^a}{r^2 G_{13}} - \frac{2p_{33,i}^c}{3r^2 \lambda^2 E_3} \right).
\end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя теперь полученные выражения (9), (18), (20) в вариационное уравнение принципа Гамильтона – Остроградского

$$\int_{-h}^h \left(\delta \ddot{I} - \delta A - \delta K \right) dt = 0,$$

после ряда стандартных преобразований получим

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \left\{ 2 \left[(M_{12} - M_{12}^s) \delta W + (N_{12} - N_{12}^s) \delta \varphi \right] \Big|_{x_1=x_1^-}^{x_1=x_1^+} \Big|_{x_2=x_2^-}^{x_2=x_2^+} + \right. \\
& + \sum_{i=1}^2 \int_{x_{3-i}^-}^{x_{3-i}^+} \left\{ \sum_{j=1}^2 [(T_{ij} - T_{ij}^s) \delta U_j + (H_{ij} - H_{ij}^s) \delta \psi_j] + (M_{ij} - M_{ij}^s) \delta W_{,j} + \right. \\
& + (N_{ij} - N_{ij}^s) \delta \varphi_{,j} - (\tilde{Q}_i + T_{ij}^s) \delta W - (\tilde{S}_i + N_{ij}^s) \delta \varphi \Big\} dx_{3-i} \Big|_{x_i=x_i^-}^{x_i=x_i^+} \\
& \left. + \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \left(f_3 \delta \varphi + f_6 \delta W - f_1 \delta U_1 - f_2 \delta U_2 - f_4 \delta \psi_1 - f_5 \delta \psi_2 \right) dx_1 dx_2 \right\} dt = 0, \tag{22}
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{Q}_1 = Q_1 + (M_{12} - M_{12}^s)_{,2}, \quad \tilde{S}_1 = S_1 + (N_{12} - N_{12}^s)_{,2}; \quad \overrightarrow{1,2}, \tag{23}$$

– обобщенные перерезывающие силы по Кирхгофу нулевого и первого приближений, а

$$Q_1 = M_{11,1} + M_{12,2} + M_1 - \ddot{M}_1, \quad S_1 = N_{11,1} + N_{12,2} + m_1 - \ddot{m}_1; \quad \overleftarrow{1,2}, \tag{24}$$

– перерезывающие силы по Кирхгофу, определяемые из уравнений равновесия моментов нулевого и первого приближений.

Из (22) следуют две обособленные системы уравнений движения

$$f_i = \sum_{j=1}^2 T_{ij,j} + X_i - \ddot{X}_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad f_3 = S_{1,1} + S_{2,2} + N_{33} - Y_3 - \ddot{Y}_3 = 0; \tag{25}$$

$$f_{i+3} = \sum_{j=1}^2 H_{ij,j} - N_{i3} - Y_i - \ddot{Y}_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad f_6 = Q_{1,1} + Q_{2,2} - X_3 + \ddot{X}_3 = 0 \quad (26)$$

и соответствующие им граничные условия при $x_i = x_i^-$, $x_i = x_i^+$

$$T_{ij} = T_{ij}^s, \text{ если } \delta U_j \neq 0, \quad N_{ij} = N_{ij}^s, \text{ если } \delta \varphi_{,j} \neq 0, \quad \tilde{S}_i = -N_{i3}^s, \text{ если } \delta \varphi \neq 0, \quad (27)$$

$$H_{ij} = H_{ij}^s, \text{ если } \delta \psi_j \neq 0, \quad M_{ii} = M_{ii}^s, \text{ если } \delta W_{,i} \neq 0, \quad \tilde{Q}_i = -T_{i3}^s, \text{ если } \delta W \neq 0. \quad (28)$$

С учетом соответствующих соотношений (13), (21), (24) уравнения (25) и граничные условия (27) формулируются относительно трех неизвестных функций U_1 , U_2 , φ , а уравнения (26) и граничные условия (28) – относительно функций W , ψ_1 , ψ_2 . Для них различные комбинации граничных условий формулируются, исходя из (27) и (28) соответственно. Кроме указанных выше, в угловых точках пластины должны быть сформулированы статические граничные условия

$$M_{12} = M_{12}^s \text{ и } N_{12} = N_{12}^s, \text{ если } \delta W \neq 0 \text{ и } \delta \varphi \neq 0 \text{ соответственно.}$$

В свете полученных ранее [13] результатов уравнениями (25) описываются продольно-поперечные формы динамического деформирования, симметричные относительно срединной плоскости $\zeta = 0$, а уравнениями (26) – изгибно-сдвиговые формы, антисимметричные относительно плоскости $\zeta = 0$. Первые из них при $\psi \equiv 0$ превращаются в классические уравнения плоской задачи теории упругости, основанные на равенствах $\sigma_{33} \equiv 0$, $\sigma_{13} \equiv 0$, $\sigma_{23} \equiv 0$, если в силу первого из этих равенств в соотношениях (13) принять

$$g_{11} = E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}); \quad \overrightarrow{1,2}, \quad g_{12} = \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}).$$

2. Продольные и продольно-поперечные формы свободных колебаний прямоугольной пластины

Если для перемещений U_i и координат x_i принять новые обозначения $U_1 = U$, $U_2 = V$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, то при использовании полученных соотношений (13), (21) уравнения (25) для постановки задач о свободных колебаниях могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(g_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho\Omega^2 \right) U + (g_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{L_1}{hr^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ f_2 &= (g_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \left(G_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho\Omega^2 \right) V + \frac{L_2}{hr^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ f_3 &= L_1 \frac{\partial U}{\partial x} + L_2 \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{h}{2} \left[(L_1 + g_{13}r^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad \left. + (L_2 + g_{23}r^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + g_{33}r^4 - \rho\Omega^2 r^2 \right] \varphi = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где Ω – круговая частота свободных колебаний; L_1 , L_2 – дифференциальные операторы, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} L_1 &= g_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (g_{12} + 2G_{12}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + g_{13}r^2 + \rho\Omega^2, \\ L_2 &= (g_{12} + 2G_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + g_{23}r^2 + \rho\Omega^2. \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом полученных ранее [13] результатов имеем, что система уравнений (29) описывает продольно-поперечные формы свободных колебаний, являющихся в поперечных плоскостях $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ бессдвиговыми.

Если принять $\varphi = 0$, то первые два уравнения системы (29) примут вид

$$\begin{aligned} \left(g_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \Omega^2 \right) U + (g_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= 0, \\ (g_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \left(G_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \Omega^2 \right) V &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Эти уравнения в общем случае незначительно отличаются от уравнений плоской задачи теории упругости (о плоском напряженном состоянии), и в точности к ним они сводятся при введении предположений (1). Следовательно, ими описываются классические продольные формы колебаний, включающие в себя и сдвиговые формы в плоскости xy .

Предположим, что на краях пластины $x = 0$, $x = a$, и $y = 0$, $y = b$ граничные условия таковы, что они выполняются в классе функций

$$U(x, y) = U_{mn} X'_m Y_n, \quad V(x, y) = V_{mn} X_m Y'_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (32)$$

где X_m и Y_n являются линейными комбинациями тригонометрических функций:

$$X_m = \sin \lambda_m x + \alpha_m \cos \lambda_m x, \quad Y_n = \sin \mu_n y + \beta_n \cos \mu_n y \quad (33)$$

с амплитудными значениями U_{mn} , V_{mn} перемещений U , V и параметрами α_m , λ_m , β_n , μ_n , $\lambda_m = m\pi/a$, $\mu_n = n\pi/b$, позволяющими удовлетворить формулируемым условиям. В частности, граничные условия вида

$$\begin{aligned} U_{,x} &= 0, \quad V = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \\ V_{,y} &= 0, \quad U = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b \end{aligned} \quad (34)$$

удовлетворяются для функций $X_m = \sin \lambda_m x$, $Y_n = \sin \mu_n y$, соответствующих шарнирному опиранию кромок.

Если подставить выражения (32) в уравнения (31), учесть (33) и ввести в рассмотрение безразмерные параметры

$$g = \frac{G_{12}}{g_{11}}, \quad g_0 = \frac{g_{22}}{g_{11}}, \quad \tilde{g}_{12} = \frac{g_{12}}{g_{11}}, \quad \eta = \frac{\mu_n^2}{\lambda_m^2}, \quad \omega_m = \frac{\rho \Omega^2}{g_{11} \lambda_m^2}, \quad (35)$$

то получим систему двух однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\omega_m - 1 - g\eta)U_{mn} - (g + \tilde{g}_{12})\eta V_{mn} &= 0, \\ (g + \tilde{g}_{12})\eta U_{mn} + (\omega_m - 1 - g_0\eta)V_{mn} &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Из них при $\eta = 0$, что соответствует бесконечно широкой пластине (то есть $a/b \rightarrow \infty$), или при $n = 0$ следуют две формулы для частотного параметра

$$\omega_{m1} = g, \quad \omega_{m2} = 1, \quad (37)$$

которые с учетом формул (35) принимают вид

$$\rho \Omega_{m1}^2 = G_{12} \lambda_m^2 = G_{12} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2, \quad \rho \Omega_{m2}^2 = g_{11} \lambda_m^2 = g_{11} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2. \quad (38)$$

Табл. 1

g	$\eta = 0$		$\eta = 1$		$\eta = 4$		$\eta = 9$	
	ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m1}	ω_{m2}
0	0.000	1.000	0.700	1.300	0.884	4.116	0.900	9.100
1/2.6	0.385	1.000	0.700	2.069	1.810	5.113	3.717	10.129

По первой из этих формул определяется частота чисто сдвиговых форм свободных колебаний, а по второй формуле – чисто продольных форм свободных колебаний, совершающихся в направлении оси x с сохранением плоской формы поперечных сечений $x = \text{const}$.

В общем случае, когда $\eta \neq 0$, условие нетривиальности решений системы (36) для определения параметра частоты колебаний ω_m приводит к характеристическому уравнению вида

$$\omega_m^2 - (l_{1m} - l_{2m})\omega_m + l_m = 0, \quad (39)$$

в котором

$$l_{1m} = 1 + g\eta, \quad l_{2m} = g + g_0\eta, \quad l_m = l_{1m}l_{2m} - (g + \tilde{g}_{12})\eta. \quad (40)$$

Решениями уравнения (39) являются корни

$$\omega_{m1,2} = \left[l_{1m} + l_{2m} \pm \sqrt{(l_{1m} - l_{2m})^2 + 4\eta(g + \tilde{g}_{12})^2} \right] / 2, \quad (41)$$

значения которых приведены в табл. 1 для следующих параметров изотропной пластины: $g_0 = 1$ ($g_{11} = g_{22}$), $\tilde{g}_{12} = g_{12}/g_{11} \approx \nu_{12} = 0.3$.

Учет поперечного обжатия пластины, позволяющий выявить неклассические продольно-поперечные формы свободных колебаний, приводит к необходимости интегрирования системы уравнений (29). Для ее преобразования в дополнение к операторам (31) введем в рассмотрение операторы

$$l_1 = g_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \Omega^2, \quad l_2 = G_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \Omega^2. \quad (42)$$

Тогда левые части первых двух уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= l_1(U) + (G_{12} + g_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{L_1}{hr^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ f_2 &= (G_{12} + g_{12}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + l_2(V) + \frac{L_2}{hr^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (43)$$

Если, далее, составить комбинации

$$l_2(f_1) - (G_{12} + g_{12}) \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad l_1(f_2) - (G_{12} + g_{12}) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 0, \quad (44)$$

то вместо первых двух уравнений системы (29) получим преобразованные уравнения вида

$$\begin{aligned} L(U) &= \frac{1}{hr^2} \left[L_2 (g_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - L_1 \left(G_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \Omega^2 \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ L(Y) &= \frac{1}{hr^2} \left[L_1 (g_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - L_2 \left(g_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \Omega^2 \right) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$L = \left(g_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G_{12} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \Omega^2 \right) \left(G_{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \Omega^2 \right) - \\ - (g_{12} + G_{12})^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}. \quad (46)$$

С учетом уравнений (45) третье уравнение системы (29) может быть приведено к разрешающему уравнению относительно функции φ

$$L \left[(L_1 + r^2 g_{13}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (L_2 + r^2 g_{23}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\pi^2 r^4 g_{33}}{\pi^2 - 8} - \frac{\pi^2 r^2 \rho \Omega^2}{\pi^2 - 8} \right] \varphi + \\ + \frac{8r^4}{\pi^2 - 8} \left[2g_{13}g_{23} (g_{12} + G_{12}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - g_{13}^2 l_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - g_{23}^2 l_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \varphi = 0. \quad (47)$$

Решение уравнения (47) будем искать в виде

$$\varphi = \hat{O}_{mn} X_m Y_n, \quad (48)$$

оно, совместно с решениями (32) при $X_m = \sin \lambda_m x$, $Y_n = \sin \mu_n y$, на кромках пластины удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания

$$\begin{aligned} T_{11} = 0, \quad V = 0, \quad N_{11} = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = a, \\ U = 0, \quad T_{22} = 0, \quad N_{22} = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b. \end{aligned} \quad (49)$$

Подставляя решения (48) в уравнение (47), используя функции (33), вводя безразмерные параметры (35) и обозначения

$$\tilde{g}_{13} = g_{13}/g_{11}, \quad i = 1, 2, 3; \quad r_m = r/\lambda_m, \quad L_m = 1 + 2(2g + \tilde{g}_{12})\eta + g_0\eta^2, \quad (50)$$

из условия существования нетривиальных решений $\hat{O}_{mn} \neq 0$ получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} [\omega_m^2 - (l_{1m} + l_{2m})\omega_m + l_m] \left[\omega_m \left(1 + \eta + \frac{\pi^2 r_m^2}{\pi^2 - 8} \right) - L_m + \right. \\ \left. + 2r_m^2 (\tilde{g}_{13} + \eta \tilde{g}_{23}) - \frac{\pi^2 r_m^4 \tilde{g}_{33}}{\pi^2 - 8} \right] - \frac{8r_m^4}{\pi^2 - 8} \left[\omega_m (\tilde{g}_{13}^2 + \eta \tilde{g}_{23}^2) + \right. \\ \left. + 2\tilde{g}_{13}\tilde{g}_{23} (g + \tilde{g}_{12})\eta - \tilde{g}_{13}^2 l_{2m} - \tilde{g}_{23}^2 l_{1m} \eta \right] = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Аналогичная подстановка решений (32) и (48) в уравнения (45) с учетом функций (33) и обозначений (35), (50) приводит к зависимостям

$$\begin{aligned} U_{mn} &= \frac{(g + \tilde{g}_{12})(L_{2m} - \omega_m)\eta - (L_{1m} - \omega_m)(l_{2m} - \omega_m)}{\omega_m^2 - (l_{2m} + l_{2m})\omega_m + l_m} \frac{4h\lambda_m}{\pi^2} \hat{O}_{mn}, \\ V_{mn} &= \frac{(g + \tilde{g}_{12})(L_{1m} - \omega_m)\eta - (L_{2m} - \omega_m)(l_{1m} - \omega_m)}{\omega_m^2 - (l_{2m} + l_{2m})\omega_m + l_m} \frac{4h\mu_m}{\pi^2} \hat{O}_{mn}, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$L_{1m} = 1 + (2g + \tilde{g}_{12})\eta + r_m^2 \tilde{g}_{13}, \quad L_{2m} = 2g + \tilde{g}_{12} + g_0\eta - r_m^2 \tilde{g}_{23}. \quad (53)$$

Можно убедиться, что для бесконечно широкой пластины, когда $\eta = 0$, уравнение (51) представимо в виде

$$(\omega_m - g) \left[(\omega_m - 1)^2 - 2q_m (\omega_m - 1) - p_m \right] = 0, \quad (54)$$

где

$$q_m = \frac{\pi^2 r_m^4 \tilde{g}_{33} - 2r_m^2 \tilde{g}_{13} + (\pi^2 - 8) - \pi^2 r_m^2}{2(\pi^2 r_m^2 + \pi^2 - 8)}, \quad p_m = \frac{8r_m^4 \tilde{g}_{13}^2}{\pi^2 r_m^2 + \pi^2 - 8}.$$

Полученное уравнение (54) имеет три корня

$$\omega_{m1} = g, \quad \omega_{m2} = 1 + q_m - \sqrt{q_m^2 + p_m}, \quad \omega_{m3} = 1 + q_m + \sqrt{q_m^2 + p_m}, \quad (55)$$

первый из которых соответствует сдвиговым формам колебаний, совершающихся в плоскости xy , а два других (при $\nu_{23} = 0$) – бессдвиговым продольно-поперечным колебаниям, детально исследованным ранее [13] для стержня-полосы. Если ввести предположение $g_{13} = 0$ (то есть $\nu_{13} = 0$), то в силу того, что $p_m = 0$, два последних корня (55) оказываются равными

$$\omega_{m2} = 1, \quad \omega_{m3} = \frac{\pi^2 r_m^4 \tilde{g}_{33} + \pi^2 - 8}{\pi^2 r_m^2 + \pi^2 - 8}, \quad (56)$$

из которых ω_{m2} соответствует чисто продольным колебаниям, совершающимся в направлении оси x с сохранением плоской формы поперечного сечения, а ω_{m3} – продольно-поперечным колебаниям.

Если же ввести предположение $\tilde{g}_{13} = 0$, $\tilde{g}_{23} = 0$, то для пластины конечной ширины ($\eta \neq 0$) для первых двух корней уравнения (51) можно получить те же выражения (41), которые соответствуют решениям динамических уравнений плоской задачи теории упругости, а для третьего корня – выражение

$$\omega_{m3} = \left[1 + 2(2g + \tilde{g}_{12}) \eta + g_0 \eta^2 + \frac{\pi^2 r_m^4 \tilde{g}_{33}}{\pi^2 - 8} \right] / \left(1 + \eta + \frac{\pi^2 r_m^2}{\pi^2 - 8} \right), \quad (57)$$

которое соответствует одной из возможных продольно-поперечных форм колебаний.

В общем случае, когда $\eta \neq 0$, $\tilde{g}_{13} \neq 0$, уравнение (51) представимо в форме

$$(\omega_m - \omega_{m1})(\omega_m - \omega_{m2})(\omega_m - q_{m3}) - p_{m\eta} \omega_m + q_{m\eta} = 0, \quad (58)$$

где

$$q_{m3} = \omega_{m3} - \frac{2r_m^2 (\tilde{g}_{13} + \tilde{g}_{23} \eta)}{1 + \eta + \pi^2 r_m^2 / (\pi^2 - 8)}, \quad p_{m\eta} = \frac{8r_m^4 (\tilde{g}_{13}^2 + \tilde{g}_{23}^2 \eta)}{\pi^2 r_m^2 + (1 + \eta)(\pi^2 - 8)},$$

$$q_{m\eta} = \frac{8r_m^4 [\tilde{g}_{13}^2 l_{2m} + \tilde{g}_{23}^2 l_{1m} \eta - 2\tilde{g}_{13} \tilde{g}_{23} (g + \tilde{g}_{12} \eta)]}{\pi^2 r_m^2 + (1 + \eta)(\pi^2 - 8)}.$$

Численное исследование этого уравнения проведено для параметров пластины $g_0 = 1$ (то есть $g_{22} = g_{11}$); $\tilde{g}_{12} = 0.3$ (то есть $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3$); $g = 1/2.6$ и при варьировании других параметров $\tilde{g}_{13} = \tilde{g}_{23}$, \tilde{g}_{33} , η , $a/(2h)$ в пределах $0 \leq \tilde{g}_{13} \leq 0.3$, $0.1 \leq \tilde{g}_{33} \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 9$, $2 \leq a/(2h) \leq 10$. Некоторые результаты вычислений приведены в табл. 2 и 3. Анализ этих результатов показал, что всегда имеется частота

$$\omega_{m1}^* = \omega_{m1} = \left[l_{1m} + l_{2m} - \sqrt{(l_{1m} - l_{2m})^2 + 4\eta(g + \tilde{g}_{12})^2} \right] / 2,$$

Табл. 2

$$\tilde{g}_{33} = 1$$

$a/2h$	\tilde{g}_{13}	m	$\eta = 0$		$\eta = 1$		$\eta = 4$		$\eta = 9$	
			ω_2^*	ω_3^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_2^*	ω_3^*
2	0	1	1.00	3.86	2.07	3.83	4.21	5.11	5.97	10.13
		2	1.01	1.01	1.29	2.07	3.00	5.11	6.97	10.13
		3	0.61	1.00	1.19	2.07	3.62	5.11	8.28	10.13
		4	0.57	1.00	1.35	2.07	4.10	5.11	8.97	10.13
		5	0.61	1.00	1.50	2.07	4.39	5.11	9.35	10.13
		6	0.67	1.00	1.62	2.07	4.59	5.11	9.57	10.13
		7	0.72	1.00	1.72	2.07	4.71	5.11	9.71	10.13
		8	0.77	1.00	1.78	2.07	4.80	5.11	9.80	10.13
		9	0.80	1.00	1.84	2.07	4.86	5.11	9.87	10.13
		10	0.83	1.00	1.87	2.07	4.90	5.11	9.92	10.13
	0.3	1	0.90	3.85	1.78	3.91	3.15	5.71	4.82	10.50
		2	0.70	1.20	1.03	2.17	2.63	5.19	6.51	10.20
		3	0.49	1.04	1.04	2.10	3.41	5.14	8.04	10.16
		4	0.49	1.02	1.24	2.09	3.96	5.13	8.82	10.14
		5	0.55	1.01	1.42	2.08	4.30	5.12	9.95	10.14
		6	0.62	1.01	1.57	2.08	4.52	5.12	9.50	10.14
		7	0.68	1.01	1.67	2.07	4.66	5.12	9.66	10.13
		8	0.73	1.00	1.75	2.07	4.76	5.12	9.76	10.13
		9	0.78	1.00	1.81	2.07	4.83	5.12	9.84	10.13
		10	0.81	1.00	1.85	2.07	4.88	5.11	9.89	10.13
10	0	1	1.00	99.81	2.07	99.63	5.11	99.11	10.13	98.32
		2	1.00	24.82	2.07	24.66	5.11	24.27	10.13	23.95
		3	1.00	10.94	2.07	10.81	5.11	10.64	10.13	10.97
		4	1.00	6.10	2.07	6.01	5.11	6.10	7.15	10.13
		5	1.00	3.86	2.07	3.83	4.21	5.11	5.97	10.13
		6	1.00	2.66	2.07	2.69	3.37	5.11	5.76	10.13
		7	1.00	1.95	2.04	2.07	3.01	5.11	5.93	10.13
		8	1.00	1.50	1.66	2.07	2.90	5.11	5.93	10.13
		9	1.00	1.20	1.43	2.07	2.92	5.11	6.62	10.13
		10	1.01	1.01	1.29	2.07	2.92	5.11	6.97	10.13
	0.3	1	0.93	99.77	1.92	99.55	4.73	98.93	9.31	98.03
		2	0.92	24.78	1.91	24.59	4.65	24.19	8.92	24.11
		3	0.92	10.91	1.89	10.77	4.45	10.77	7.43	12.69
		4	0.91	6.07	1.85	6.01	3.93	6.79	5.52	10.89
		5	0.90	3.85	1.78	3.91	3.15	5.71	4.82	10.50
		6	0.89	2.67	1.65	2.91	2.64	5.42	4.85	10.36
		7	0.86	1.99	1.45	2.47	2.44	5.30	5.19	10.28
		8	0.82	1.58	1.25	2.29	2.42	5.24	5.63	10.24
		9	0.77	1.34	1.11	2.21	2.50	5.21	6.08	10.22
		10	0.7	1.20	1.03	2.17	2.63	5.19	6.51	10.20

которая не зависит от параметров и соответствует сдвиговым в плоскости xu формам колебаний. Значение второго корня уравнения (58) $\omega_m = \omega_{m2}^*$, соответствующего продольно-поперечным формам колебаний, при всех рассмотренных параметрах пластины ниже значений частоты ω_{m2} , определяемой по формуле (41)

$$\omega_{m2} = \left[l_{1m} + l_{2m} + \sqrt{(l_{1m} - l_{2m})^2 + 4\eta(g + \tilde{g}_{12})^2} \right] / 2.$$

Табл. 3

$$\tilde{g}_{33} = 0.1$$

$a/2h$	\tilde{g}_{13}	m	$\eta = 0$		$\eta = 1$		$\eta = 4$		$\eta = 9$	
			ω_2^*	ω_3^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_2^*	ω_3^*	ω_2^*	ω_3^*
2	0	1	0.43	1.00	0.54	2.07	1.30	5.11	3.52	10.13
		2	0.24	1.00	0.64	2.07	2.54	5.11	6.66	10.13
		3	0.33	1.00	0.98	2.07	3.49	5.11	8.21	10.13
		4	0.44	1.00	1.26	2.07	4.05	5.11	8.95	10.13
		5	0.55	1.00	1.46	2.07	4.37	5.11	9.34	10.13
		6	0.63	1.00	1.60	2.07	4.57	5.11	9.56	10.13
		7	0.70	1.00	1.70	2.07	4.71	5.11	9.71	10.13
		8	0.75	1.00	1.78	2.07	4.79	5.11	9.80	10.13
		9	0.79	1.00	1.83	2.07	4.86	5.11	9.87	10.13
		10	0.83	1.00	1.87	2.07	4.90	5.11	9.91	10.13
	0.3	1	0.40	1.01	0.51	2.07	1.23	5.12	3.42	10.13
		2	0.23	1.00	0.62	2.07	2.50	5.11	6.61	10.13
		3	0.32	1.00	0.96	2.07	3.47	5.11	8.18	10.13
		4	0.44	1.00	1.24	2.07	4.03	5.11	8.93	10.13
		5	0.54	1.00	1.45	2.07	4.36	5.11	9.32	10.13
		6	0.63	1.00	1.60	2.07	4.57	5.11	9.56	10.13
		7	0.70	1.00	1.70	2.07	4.70	5.11	9.70	10.13
		8	0.75	1.00	1.77	2.07	4.79	5.11	9.80	10.13
		9	0.79	1.00	1.83	2.07	4.85	5.11	9.86	10.13
		10	0.82	1.00	1.87	2.07	4.90	5.11	9.91	10.13
10	0	1	1.00	9.98	2.07	9.97	5.11	9.95	10.00	10.13
		2	1.00	2.49	2.07	2.49	2.59	5.11	3.04	10.13
		3	1.00	1.11	1.14	2.07	1.42	5.11	2.42	10.13
		4	0.64	1.00	2.07	2.07	1.21	5.11	2.83	10.13
		5	0.43	1.00	0.54	2.07	1.30	5.11	3.52	10.13
		6	0.32	1.00	0.49	2.07	1.51	5.11	4.27	10.13
		7	0.27	1.00	0.50	2.07	1.76	5.11	4.98	10.13
		8	0.25	1.00	0.53	2.07	2.03	5.11	5.62	10.13
		9	0.24	1.00	0.58	2.07	2.29	5.11	6.18	10.13
		10	0.24	1.00	0.64	2.07	2.54	5.11	6.66	10.13
	0.3	1	0.99	9.98	2.04	9.97	4.98	10.01	8.85	11.13
		2	0.98	2.49	1.95	2.59	2.46	5.17	2.85	10.17
		3	0.92	1.17	1.08	2.10	1.34	5.13	2.28	10.14
		4	0.60	1.02	0.67	2.08	1.14	5.12	2.71	10.14
		5	0.40	1.01	0.51	2.07	1.23	5.12	3.42	10.13
		6	0.30	1.00	0.46	2.07	1.45	5.12	4.18	10.13
		7	0.25	1.00	0.47	2.07	1.70	5.12	4.90	10.13
		8	0.23	1.00	0.50	2.07	1.98	5.11	5.55	10.13
		9	0.22	1.00	0.56	2.07	2.24	5.11	6.12	10.13
		10	0.23	1.00	0.62	2.07	2.50	5.11	6.61	10.13

Они достаточно сильно зависят от определяющего параметра \tilde{g}_{33} , что указывает на их значительную практическую значимость для пластин из волокнистых композитных материалов. Так, например, сравнивая значения ω_{m2} , приведенные в табл. 1, со значениями ω_{m2}^* , приведенными в табл. 2 (при $\tilde{g}_{33} = 1$, что соответствует изотропному материалу) и табл. 3 (при $\tilde{g}_{33} = 0.1$), можно видеть, что при уменьшении параметра η и малых значениях \tilde{g}_{33} отношение $\omega_{m2}^*/\omega_{m2}$ становится значительно меньше единицы.

Как видно из табл. 2 и 3, наибольшие значения имеет третий корень уравнения (58). Для его вычисления, как показали расчеты, с погрешностью 4% можно рекомендовать формулу

$$\omega_{m3}^* = \frac{\omega_{m2} (\pi^2 - 8) + \pi^2 r_m^4 \tilde{g}_{33} - 2r_m^2 (\tilde{g}_{13} + \tilde{g}_{23} \eta)}{\pi^2 r_m^2 + (1 + \eta) (\pi^2 - 8)}.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00279-а).

Summary

V.N. Paimushin, T.V. Polyakova. On a Variant of the Improved Theory of Ortotropic Plates: Nonclassical Forms of Free Fluctuations.

This paper offers an improved variant of the equations of free fluctuations of ortotropic plates constructed as a first approximation by the reduction of the three-dimensional equations of the theory of elasticity to the two-dimensional equations of the theory of plates by using trigonometric basic functions and by satisfying static boundary conditions on boundary surfaces. The solutions to these equations are found for a plate with jointedly supported edges. The equations are divided into two isolated systems of equations. The first system describes the nonclassical shiftless longitudinal-transverse forms of free fluctuations accompanied by a distortion of the flat form of the transverse sections. It is shown that the fluctuation frequencies corresponding to these forms at some geometrical parameters of a plate strongly depend on Poisson's ratio and elasticity module in a transverse direction and, for plates of a medium thickness with the same frequency parameter (tone), can be considerably lower than the frequencies corresponding to the classical longitudinal forms of free fluctuations proceeding with preservation of the flat form of the transverse sections. The second system of equations describes the transverse bend-shift forms of free fluctuations, the frequencies of which decrease at the reduction of the transverse shift module. According to the quality and pithiness, these equations are almost equivalent to the similar equations in the known variants of improved theories, but, unlike them, under the increase in the tone number and the reduction of thickness ratio, lead to the solutions obtained within the classical theory of rods.

Key words: ortotropic plate, improved theory, trigonometric functions, free fluctuations, longitudinal-transverse form, fluctuation frequencies.

Литература

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: прочность, устойчивость и колебания. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
3. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наукова думка, 1973. – 248 с.
4. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
5. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
6. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. – Новосибирск: Наука, 2004. – 407 с.
7. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. – М.: ВИНТИ, 1973. – Вып. 5. – 272 с.

8. *Альтенбах Х.* Основные направления теории многослойных тонкостенных конструкций // *Механика композитных материалов.* – 1998. – Т. 34, № 3. – С. 333–348.
9. *Паймушин В.Н.* Точные и приближенные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями, основанные на тригонометрических базисных функциях // *Механика композитных материалов.* – 2005. – Т. 41, № 4. – С. 461–488.
10. *Паймушин В.Н.* Точные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями // *Изв. вузов. Матем.* – 2006. – № 8. – С. 54–62.
11. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Точные аналитические решения трехмерной задачи о свободных колебаниях ортотропного прямоугольного параллелепипеда со свободными гранями // *Механика композитных материалов и конструкций.* – 2006. – Т. 12, № 3. – С. 317–336.
12. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Точные и приближенные уравнения статики и динамики стержня-полосы и обобщенные классические модели // *Механика композитных материалов и конструкций.* – 2008. – Т. 14, № 1. – С. 126–156.
13. *Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* О малых свободных колебаниях полосы // *Прикл. матем. и механика.* – 2011. – Т. 75, № 1. – С. 72–82.
14. *Паймушин В.Н., Иванов В.А., Полякова Т.В.* Исследование напряженно-деформированного состояния стержня-полосы на основе уравнений плоской задачи теории упругости и нового варианта уточненной теории стержней // *Механика композитных материалов и конструкций.* – 2008. – Т. 14, № 3. – С. 373–388.
15. *Паймушин В.Н., Фирсов В.А.* Оболочки из стекла. Расчет напряженно-деформированного состояния. – М.: Машиностроение, 1993. – 208 с.

Поступила в редакцию
08.10.12

Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой сопротивления материалов Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: pajmushin@mail.ru

Полякова Татьяна Витальевна – кандидат физико-математических наук, доцент, докторант Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева.

E-mail: dsm@dsm.kstu-kai.ru